

TD

Série N° : 1

Logique des propositions

Exercice 1 : (variables propositionnelles ,formules) Donner les propositions (avec les variables propositionnelles) et Ecrire en langage propositionnel les phrases suivantes :

- 1) : Socrate n'est pas un homme,
- 2) : Médor n'est pas un chien,
- 3) : Socrate est un homme et Médor est un chien,
- 4) : Il pleut ou il fait beau,
- 5) : Si Socrate est un homme, alors Médor est un chien
- 6) : Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
- 7) : Les chiens n'aboient pas.
- 8) : La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- 9) : Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.
- 10) :L'enfant sait lire et écrire
- 11) : l'enfant sait lire mais il ne sait pas écrire
- 12) : si l'enfant sait écrire alors il sait lire
- 13) : l'enfant ne sait pas lire ou il ne sait pas écrire
- 14) : l'enfant ne sait pas lire et il ne sait pas écrire

Exercice 2 : Soit les propositions suivantes :

P: Khaled est sportif Q : Khaled sait nager R: Saïd est sportif S : Saïd sait nager

1) Ecrire en langage propositionnel les phrases suivantes :

- a. Khaled et Saïd sont des sportifs
- b. Khaled et Saïd sont des sportifs mais ils ne savent pas nager
- c. si Khaled n'est pas un sportif et sait nager alors Saïd ne sait pas nager

2) traduisez les formules logiques suivantes en phrases du langage naturel :

- (1) $P \wedge Q$; (2) $(P \wedge \neg S) \rightarrow R$; (3) $(Q \rightarrow P)$; (4) $(\neg P) \vee (\neg Q)$; (5) $(\neg P) \wedge (\neg Q)$
(6) $P \leftrightarrow Q$; (7) $(R \rightarrow \neg S) \vee \neg R$; (8) $(Q \rightarrow P) \rightarrow S$; (9) $\neg (P \vee R)$;

Exercice 3 : Après avoir préparé un gâteau pour ses quatre enfants, la Maman laisse le gâteau refroidir sur la table de la cuisine puis s'en va faire une course. A son retour, elle s'aperçoit que le quart du gâteau a été mangé. Puisque personne d'autre que les quatre enfants n'était à la maison ce jour là, la Maman demande à chacun des ses enfants qui a mangé le gâteau. Les quatre « suspects » disent ceci :

- **Chabane** : Katia a mangé le quart du gâteau ;
- **Saliha** : Je n'ai pas mangé le quart du gâteau ;
- **Katia** : Djamel a mangé le quart du gâteau ;
- **Djamel** : Katia a menti lorsqu'elle a dit que j'ai mangé le quart du gâteau.

Si **seulement une** de ces quatre propositions est **vraie** et seulement **un** des quatre enfants est **coupable**, qui des quatre a effectivement mangé le quart du gâteau ?

Exercice 4 : Trois personnes, Ali (A), Belaid (B) et Chérif (C) exercent chacune une profession différente : pharmacien, dentiste ou chirurgien. Sachant que les implications suivantes sont **vraies**, retrouver leur profession :

- A chirurgien \rightarrow B dentiste
- A dentiste \rightarrow B pharmacien
- B non chirurgien \rightarrow C dentiste

Exercice 5 : Evaluer les formules suivantes en considérant uniquement les valeurs des variables données:

- 1) $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$, avec $Q = F$
- 2) $P \wedge (P \vee Q)$, avec $Q = V$
- 3) $P \vee (Q \rightarrow R)$, avec $Q = F$

Exercice 6 : Relier les propositions équivalentes :

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| (1) $\neg(P \wedge Q)$ | a) $\neg P \wedge \neg Q$ |
| (2) $\neg(P \vee Q)$ | b) $Q \rightarrow (\neg P)$ |
| (3) $P \rightarrow (\neg Q)$ | c) $\neg P \vee \neg Q$ |
| (4) $\neg(P \rightarrow Q)$ | d) $P \wedge (\neg Q)$ |

Exercice 7 : Représentez les formules suivantes sous forme d'arbre syntaxique. Donnez ensuite les notations polonaises :

- $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vee (R \rightarrow Q)$
- $((\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow P$
- $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

Exercice 8 : Construire l'arbre de décomposition de la formule suivante :

- $\neg((P \vee Q) \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow (R \vee \neg S))$

Si $P = V$; $Q = F$; $R = F$; $S = V$; Évaluer la formule en utilisant la notation préfixée .

Exercice 9 : L'ensemble $T = \{ P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q, \neg P \}$ est-il satisfiable ?

Exercice 10 : $P \rightarrow Q \models P \leftrightarrow Q$?

Exercice 11 : (Formule satisfiable, tautologies) Soit $\Gamma = \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha), \neg \alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \neg \gamma, \alpha, \neg \beta, \neg \gamma\}$ un ensemble de formules dans le langage de la logique propositionnelle.

Donner un exemple de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ pour que Γ soit satisfiable

- a) Donner un exemple de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ pour que Γ soit non satisfiable
- b) Donner un exemple de $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ pour que $\Gamma \models \gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Exercice 12 : (tautologies) A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si les formules suivantes sont des tautologies.

- $P \vee \neg P$ (principe du tiers exclu)
- $\neg(P \wedge \neg P)$ (principe de non-contradiction)
- $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$ (commutativité de \vee)
- $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ (le vrai est impliqué par tout)
- $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (le faux implique tout)
- $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$ (preuve par l'absurde)
- $((\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow P$ (preuve par l'absurde)
- $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$ (transitivité de \rightarrow)

Exercice 13 : Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes :

- $(P \rightarrow R) \vee (R \rightarrow Q)$
- $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vee (R \rightarrow Q)$

Exercice 14 : Montrer que les ensembles suivants forment des systèmes complets

- $S1 = \{\neg, \wedge\}$
- $S2 = \{\neg, \rightarrow\}$